Les nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté i, solution de cette équation.
On va construire un ensemble noté $\mathbb{C}$ plus grand que $\mathbb{R}$ qu'est engendré par le couple $(1, i)$ (càd. tout élèment de $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de 1 et i à coefficients dans $\mathbb{R}$).

Définition :

L'ensemble $\mathbb{C}$ est définie par : $\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ et \ i^2 = -1\}$.
⋆ $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élèment de $\mathbb{C}$) de z.
⋆ a s'appelle la partie réelle de z sera notée $\mathfrak{Re}(z)$.
⋆ b s'appelle la partie imaginaire de z sera notée $\mathfrak{Im}(z)$.
⋆ L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté $i\mathbb{R}$.

Proposition :

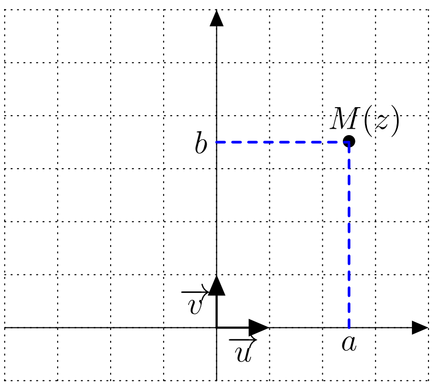
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

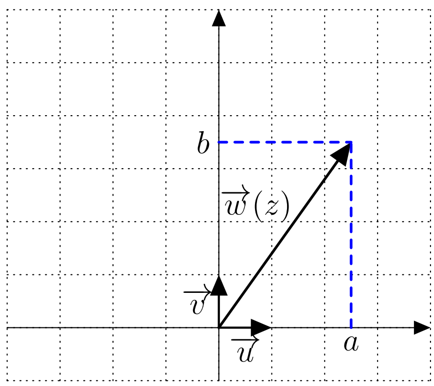
$$z = z' \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \ et \ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \qquad\qquad z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}(z) = 0$$

La représentation graphique d'un nombre complexe :

Le plan (P)(appelé après le plan complexe) minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
⋆ Tout point $M(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $M(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de M et on écrit $z = aff(M)$.
⋆ Tout vecteur $\overrightarrow{w}(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a+ib$, on écrit $\overrightarrow{w}(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et on écrit $z = aff(\overrightarrow{w})$.





Conséquences :

⋆ Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.
⋆ Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnés appelé l'axe imaginaire.

Proposition :

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $\overrightarrow{w}(z_{\overrightarrow{w}})$, $\overrightarrow{t}(z_{\overrightarrow{t}})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad aff(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = aff(\overrightarrow{w}) + aff(\overrightarrow{t}) \quad ; \quad aff(\alpha\overrightarrow{w}) = \alpha.aff(\overrightarrow{w})$$

Proposition :

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $I(z_I)$ telle que I est le milieu de $[AB]$. On a :
⋆ $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ ⋆ Si A, B et C sont distincts, alors : A, B et C sont rectilignes $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et en général : $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$. $\star$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et en général : $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.

$\star$ Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. $\star$ $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

Conséquences :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z) \quad ; \quad z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z) \quad ; \quad \overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$; \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \quad ;$$

Définition :

Le plan complexe minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
Le module du nombre complexe z est la distance OM sera noté $|z|$ et on a : $OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et en général : $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$.

$\star$ Si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. $\star$ $|z^n| = |z|^n$. $\star$ $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Conséquences :

$\star$ $z\overline{z} = |z|^2$ $\star$ $|\overline{z}| = |-z| = |z|$ $\star$ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\star$ $z = z' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |z| = |z'|$.

$\star$ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on a : $AB = |z_B - z_A|$.

3 L'argument et la forme trigonomètrique d'un nombre complexe

Définition :

Soit $M(z)$ dans le plan complexe, minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, tel que $z \neq 0$.

On appelle argument de z qu'on note $arg(z)$ toute mesure de l'angle orientée $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ en radian et on écrit $arg(z) \equiv \overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})}[2\pi]$.

Remarque :

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$ et en général : $arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} arg(z_k)$.

$\star$ $arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -arg(z')[2\pi]$ $\star$ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$ $\star$ $arg\left(z^n\right) \equiv n\, arg(z)[2\pi]$

Proposition :

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ des points du plan complexe $C \neq D$ on a :
$\star$ Si $A \neq B$ on a : $\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv arg(b-a)[2\pi]$.
$\star$ Si $A \neq B$ et $A \neq C$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$.
$\star$ Si $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

Remarques :

$\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv 0[2\pi]$. $\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.

$\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. $\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Proposition :

Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ s'écrit sous la forme $z = r[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)]$ où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{r}$.

Définition :

L'écriture $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ s'appelle la forme trigonomètrique du nombre complexe z et on note $z = [r, \alpha]$.
(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument)

Proposition :

Soients $z = [r, \alpha]$ et $z = [r', \alpha']$ de $\mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$-z = [r, \alpha+\pi] \quad ; \quad \overline{z} = [r, -\alpha] \quad ; \quad zz' = [rr', \alpha+\alpha'] \quad ; \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\alpha\right]$$
$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha-\alpha'\right] \quad ; \quad z^n = [r^n, n\times\alpha]$$

La formule de Moivre

Pour tout couple $(n, \alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ on a : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.

Remarque :

La formule de Moivre sert à calculer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

4 La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définition :

$\star$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on note par $e^{i\alpha}$ le nombre complexe $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ et on écrit $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
$\star$ Pour tout nombre complexe non nul z, on appelle la notation exponentielle la notation $re^{i\alpha}$ où $z = [r, \alpha]$ et on écrit $z = re^{i\alpha}$.

Proposition :

Pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\star$ $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$ $\star$ $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ $\star$ $e^{i\alpha}e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$ $\star$ $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}$

Proposition :

Les formules d'Euler : $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}}$

Remarque :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^m(x)$. Càd les transformées en somme des termes de types $a\cos(kx)+b\sin(kx)$ en développant $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$.

Exemples :

$$\cos^3(x)=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x) \qquad \sin^4(x)=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

5 Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Définition :

Soient u un nombre complexe non nul et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$.
On dit que le nombre complexe z est une racine n-ième (ou racine d'ordre n) du nombre complexe u si $z^n=u$.

Proposition :

Tout nombre complexe non nul $z=re^{i\alpha}$ tel que $r>0$, admet n racines n-ièmes qui sont :

$$z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \qquad k\in\{0,1,...,n-1\}$$

Proposition :

La somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. $\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=0\right)$

Conséquences :

⋆ Les racines n-ièmes de l'unité sont : $u_k=e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0,1,...,n-1\}$
⋆ Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
⋆ Les racines cubiques de l'unité sont : 1, $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.
⋆ Les racines 4-ièmes de l'unité sont 1, -1, i et $-i$.

Proposition :

$$1+j+j^2=0 \quad ; \quad \overline{j}=j^2 \quad ; \quad j^3=(\overline{j})^3=1 \quad ; \quad j\overline{j}=1$$

Proposition :

Toute équation $az^2+bz+c=0$ tels que $a\in\mathbb{C}^*$ et $b,c\in\mathbb{C}$ admet :
⋆ une solution double $z=-\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta=b^2-4ac=0$.
⋆ deux solutions différentes $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ si $\Delta\neq 0$ avec δ est une racine carrée de Δ.

Conséquences :

Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$ alors :
⋆ $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
⋆ $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

6 Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Description complexe
une translation du vecteur $\overrightarrow{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - w) + w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ $(M \neq \Omega)$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overline{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert z' - w\rvert = \lvert z - w\rvert \\ arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w$